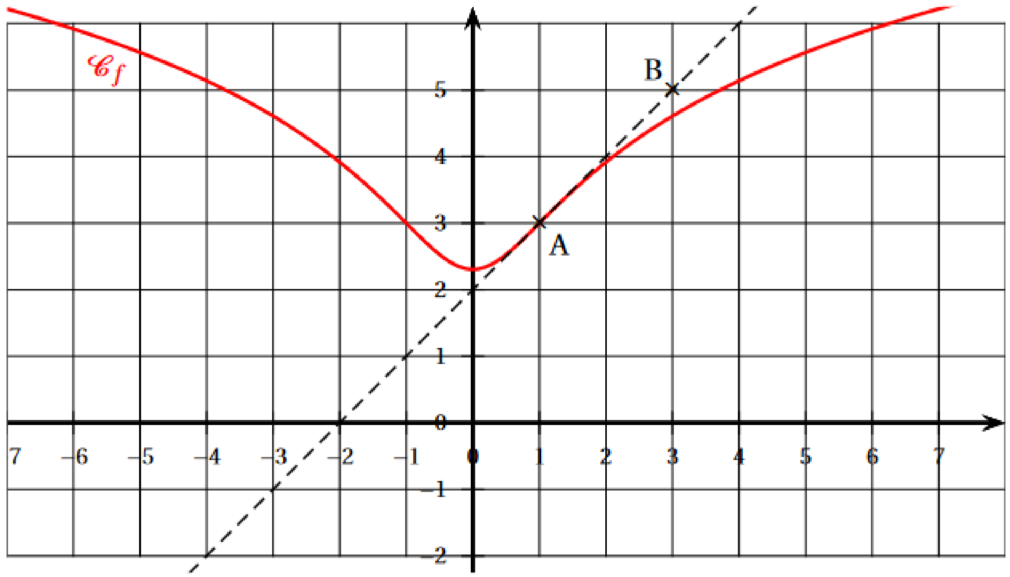
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5).
On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).
2. a. Comme $a \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$, on a $ax^2 \geqslant 0$, donc $ax^2 + 1 \geqslant 1 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{2ax}{ax^2+1}$.

   b. Les résultats du 1. peuvent s'écrire :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} f(1) & = & 3 \\ f'(1) & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ln(a+1)+b & = & 3 \\ \dfrac{2a}{a+1} & = & 1 \end{array}\right. .$$
   La deuxième équation donne $2a = a+1 \iff a = 1$ et en reportant dans la première :
   $\ln(1+1)+b = 3 \iff b = 3 - \ln 2$.
   On a donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln 2$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln(2).$$

1. Quel que soit le réel x, $f(-x) = \ln\left[(-x)^2+1\right]+3-\ln 2 = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2) = f(x)$.
La fonction f est donc paire (la représentation graphique de f est donc symétrique autour de l'axe des ordonnées).

2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(ax^2+1\right) = +\infty$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La fonction étant paire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Comme $x^2+1>0$ quel que soit le réel x, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Le dénominateur étant supérieur à zéro le signe de $f('x)$ est donc celui de $2x$, donc :
$f'(x)<0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x)>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le nombre $f(0) = \ln 1+3-\ln 2 = 3-\ln 2$ est donc le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. D'après le tableau de variations l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions si $k>3-\ln 2$.

5. $f(x) = 3+\ln 2 \iff \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2) = 3+\ln(2) \iff \ln\left(x^2+1\right) = 2\ln(2) \iff \ln\left(x^2+1\right) = \ln 4 \iff x^2+1 = 4$ (par croissance de la fonction logarithme), soit $x^2 = 3$, d'où deux solutions $S = \left\{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\right\}$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Il semble qu'il y ait deux points d'inflexion aux points d'abscisses -1 et 1.

2. Comme $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ soit le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur étant non nul; f' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$f''(x) = \frac{2\left(x^2+1\right)-2x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

3. On a donc $f''(x) = 0 \iff 1-x^2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1+x & = & 0 \\ 1-x & = & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ x & = & 1 \end{array}\right.$ Donc $S = \{-1\ ;\ 1\}$.
La dérivée seconde est positive quand le trinôme $1-x^2$ est positif soit sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$. Donc la fonction f est convexe sur $]-1\ ;\ 1[$.